

Vortexdualiteit

De meeste mensen denken bij faseovergangen aan bijvoorbeeld het verdampen van een vloeistof naar een gas bij het verhogen van de temperatuur. Faseovergangen kunnen beschreven worden door middel van een ordeparameter die nul is in de wanordelijke fase en een eindige waarde verkrijgt wanneer het systeem in de geordende fase is. Wiskundig is de faseovergang ook op te vatten als de opeenhoping van defecten die de orde verstoren. Met deze beschrijving bekijken we de overgang van geordend naar ongeordend. In mijn proefschrift wordt de beschrijving van de faseovergang in termen van defecten uitgebreid naar drie ruimtedimensies, waaruit de voorspelling volgt dat er in een zogenaamde Mott-isolator gequantiseerde lijnen van elektrische stroom kunnen optreden. Aron Beekman

Ordeparameters

Bij het onderscheiden van fasen van materie (aggregatietoestanden) en het beschrijven van de overgangen daartussen moeten we eerst een grootte introduceren die kan aangeven of het systeem zich in een bepaalde fase bevindt. Volgend op ideeën van Gorter en Casimir gebruikte Landau hier de 'ordeparameter' voor. Dat is een grootte gedefinieerd op ieder punt in de ruimte, waarvan de verwachtingswaarde nul is in de ongeordende toestand, maar een eindige waarde heeft in de geordende toestand. Wanneer we de waarde van de ordeparameter op een bepaald punt kennen, kunnen we de waarde op een ander punt afleiden. Er zijn dan dus langedrachtscorrelaties in het systeem, wat overeenkomt met ons beeld van geordendheid. Ik zal het hier alleen over de intuïtieve termen orde en wanorde hebben – het precieze concept 'spontane symmetriebreking' laat ik achterwege.

Een voorbeeld van een ordeparameter is de richting van magnetisatie in een ferromagneet, die we kunnen voorstellen als een pijltje op ieder punt in de ruimte. Wanneer de pijltjes ongeordend zijn, is er geen resulterende magnetisatie en de magneet is in de para-

magnetische toestand; als alle pijltjes dezelfde kant op wijzen, bevindt het systeem zich in de ferromagnetische toestand. De traditionele Landautheorie van faseovergangen beschrijft de overgang van de ongeordende naar de geordende toestand, dus de creatie van orde. Het is echter net zo goed mogelijk om de overgang in de tegengestelde richting te beschouwen. Namelijk de overgang van orde naar wanorde veroorzaakt door bijvoorbeeld thermische fluctuaties. Deze 'duale' beschrijving heeft het voordeel dat het proces van ontordening beter begrepen kan worden en bovendien nieuwe verschijnselen voorspelt, wat ik hier zal beargumenteren.

Topologische defecten

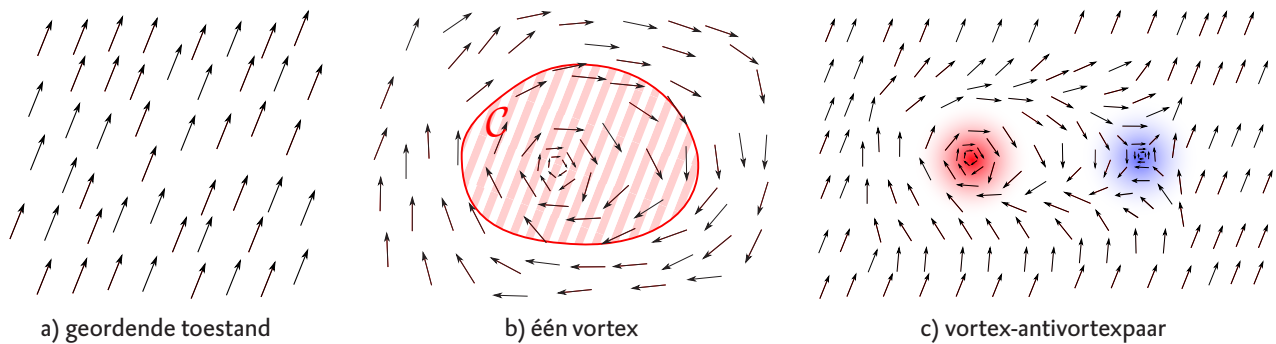
In geordende systemen zullen kleine afwijkingen van de voorkeurswaarde van de ordeparameter zich als 'geluidsgolven' (Nambu-Goldstonetoestanden) door het medium voortplanten. In feite zorgen deze golven ervoor dat de ordeparameter over lange afstanden dezelfde waarde heeft, oftewel deze golven communiceren de rigiditeit in het systeem. Daarnaast zijn er configuraties van het systeem mogelijk die niet tot een perfecte ordening

te herleiden zijn. De invloed van zo'n configuratie is niet alleen lokaal maar reikt tot aan de uiteinden van het systeem, vandaar de naam 'topologisch defect'. Derhalve groeit de energie ervan met de grootte van het systeem, waardoor ze alleen in topologisch neutrale combinaties voorkomen (zie figuur 1), of in een klein systeem onder externe verstoring, zoals een vortexlijn in superfluïde helium. Wat direct opvalt, is dat een topologisch defect de orde ontwricht. Zouden de defecten iets te maken hebben met de overgang van een geordende naar een ongeordende toestand? Het antwoord is bevestigend, en dat is het onderwerp

Aron Beekman studeerde af in de theoretische natuurkunde bij Sander Bais aan de Universiteit van Amsterdam. Hij verdedigde zijn proefschrift *Vortex duality in higher dimensions* op 1 december 2011 aan de Universiteit Leiden, met Jan Zaanen als promotor. Nu werkt hij als postdoc bij RIKEN Advanced Science Institute in Wako, Japan in de groep van Naoto Nagaosa.



aron@riken.jp



Figuur 1 Een vortex is een configuratie waarin de richting van de fase verandert met een veelvoud van 2π over een gesloten, maar willekeurige contour C eromheen. In het midden bevindt zich een singulariteit waar de fase niet goed gedefinieerd is. De contour om een topologisch neutrale combinatie levert een totale verandering van 0 op, en zo'n combinatie kan spontane lokale excitatie optreden.

van mijn proefschrift [1]. Voor het gemak beperk ik me tot vortices, dat zijn defecten van een faseveld zoals die in figuur 1. Vortices treden bijvoorbeeld op in superfluiditeit en supergeleiding.

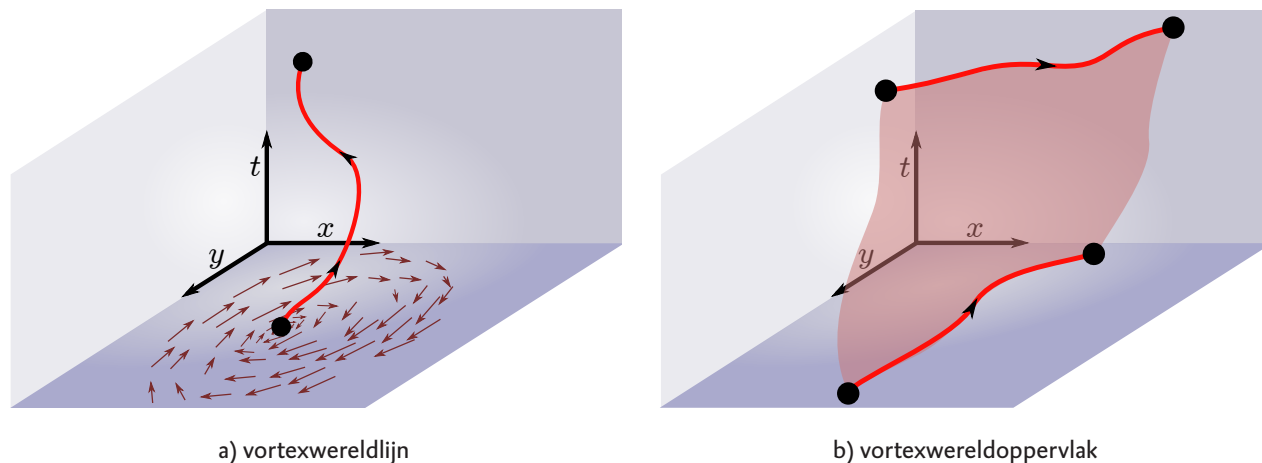
Hoewel de aanwezigheid van een vortex het hele systeem verstoort, kan het wiskundig beschreven worden als de singulariteit in de oorsprong van de vortex, waar de ordeparameter niet langer goed gedefinieerd is (zie figuur 1b). Sterker nog, als we ons niet bekommeren om de speciale eigenschappen van de vortexkern, maar alleen in de overheersende globale effecten geïnteresseerd zijn, dan is een vortex in het platte vlak op te vatten als een duaal deeltje. Dit vortexdeeltje volgt in de ruimtetijd een wereldlijn net zoals gewone deeltjes dat doen (figuur 2a). Nu blijkt het mogelijk te zijn om een veldentheorie op te stellen die de dynamica van de vortexdeeltjes beschrijft. Deze veldentheorie is wiskundig equivalent aan de veldentheorie van elektromagnetisme die de Coulombinteracties tussen geladen

deeltjes beschrijft in termen van fotonen. In de veldentheorie voor vortexdeeltjes gedragen zij zich als waren zij 'elektrisch geladen deeltjes'. De interacties tussen vortices worden overgedragen door 'duale fotonen' die corresponderen met de Nambu-Goldstonetoestanden, die verstoringen van de orde door het hele systeem brengen. Daarom noemen we de superfluïde toestand met vortices 'duaal' aan een Coulombgas van vortices.

Faseovergang als proliferatie van vortices

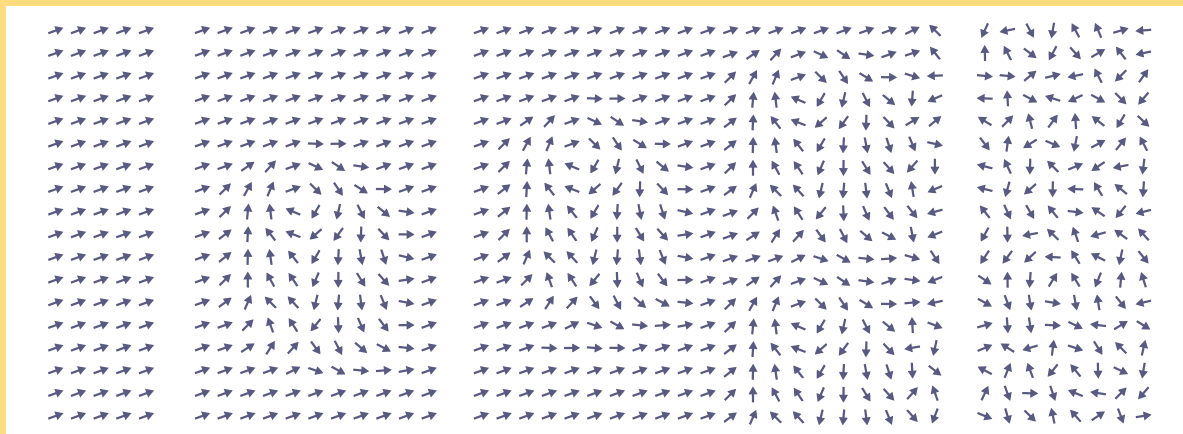
Zoals gezegd komt spontane vorming van vortex-antivortexparen voor als lokale excitatie in ieder systeem. Voor de sterk geordende toestand zullen deze excitaties hevig onderdrukt zijn, maar richting de faseovergang komen ze vaker voor, leven ze langer en worden ze groter. Dit gaat één-op-één gepaard met verkleining van de oorspronkelijke ordeparameter en een wanordelijker fase. Uiteindelijk zullen de vortices op ieder punt kunnen ontstaan en is het hele systeem ontor-

dend (zie kader *Vortexproliferatie*). Voor de experts: dit is een Bosecondensaat van vortexdeeltjes. De volledig ontordende toestand is dual aan een geordende toestand voor de vortices, met zijn eigen ordeparameter. De waarde van deze duale ordeparameter geeft de dichtheid van de 'vortexvloeistof' weer. Dit is wat we bedoelen met 'vortexdualiteit': de ontordende toestand in termen van de fase is de geordende toestand voor de vortices en vice versa. Als de geordende toestand als een gas van geladen deeltjes is, wat is dan het 'elektromagnetische analogon' van de ongeordende toestand? Hierbij moeten we weer aan de krachtoverbrengende fotonen denken. Die zijn vrij en massaloos in het vacuüm; maar in een supergeleider koppelen zij aan het condensaat van Cooperparen, waardoor ze niet meer binnen kunnen dringen. Op deze manier worden magneetvelden uit de supergeleider gedrukt, het Meissnereffect. De reden is dat door de koppeling aan het condensaat de fotonen een massa verkrijgen (het Anderson-Higgsme-



Figuur 2 a) een vortexdeeltje in het platte vlak volgt een wereldlijn in de ruimtetijd. b) driedimensionale doorsnede van vierdimensionale ruimtetijd, waarin een vortexlijn een wereldoppervlak volgt.

Vortexproliferatie



Figuur 3 Ontoending door vortexproliferatie in het platte vlak.

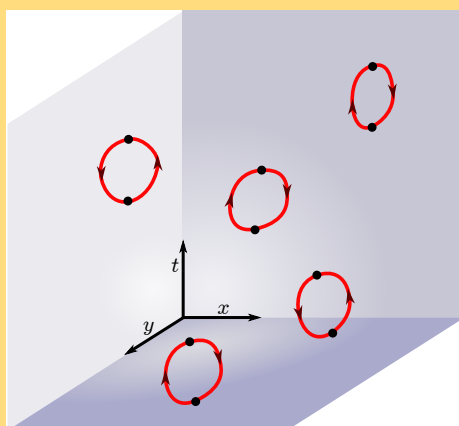
Van links naar rechts:

- (i) De volledig geordende toestand met langdrachts-correlaties.
- (ii) Excitatie in de vorm van een vortex–antivortexpaar. Ver weg van de excitatie is het systeem nog steeds geordend, dit is dus een topologisch neutrale toestand. Het ‘uit elkaar trekken’ van het paar defecten kost energie evenredig met de onderlinge afstand.

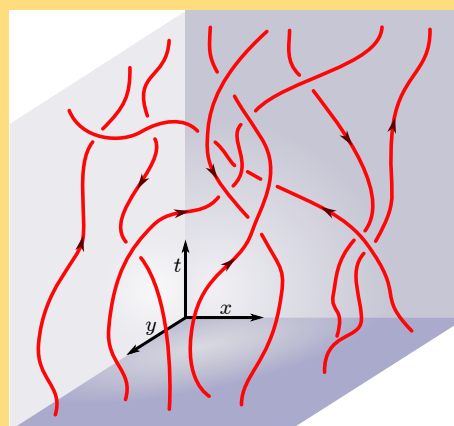
(III) Vorming van meerdere vortex–antivortexparen zorgt voor toenemende wanorde.

(iv) Volledig wanordelijke toestand, waarin individuele vortices niet meer onderscheiden kunnen worden, maar zich als een ‘vortexvloeistof’ manifesteren.

In ruimtetijd ziet toestand (ii) eruit als enkele kleine ruimtetijdslussen en toestand (iv) als de ‘kluwen van vortexwereldlijnen’.



Figuur 4 Geordende toestand met enkele vortexwereldlijnslusjes.



Figuur 5 Vortexcondensaat: de ontoordende toestand.

486

chanisme). Hetzelfde gebeurt nu aan de duale kant: de duale fotonen verkrijgen een effectieve massa door koppeling aan het vortexcondensaat. Hierdoor kunnen ze niet meer de langdrachts-correlaties in de ordeparameter herstellen, en bevinden we ons inderdaad in de ongeordende toestand. Deze is dus dual aan een supergeleider.

Wereldoppervlakken

Nu zijn de meeste systemen niet tweemaal driedimensionaal. Voor de faseordering maakt dat weinig uit: er is nog steeds één voorkeursrichting.

Daarentegen is een vortex niet langer een deeltje, maar een lijn. In de ruimtetijd volgt het dan een wereldoppervlak (figuur 2b). De beschrijving van zo'n wereldoppervlak is gecompliceerder dan die van een wereldlijn. Nog altijd oefenen de vortexlijnen krachten op elkaar uit, maar de massalozere deeltjes die de interactie dragen zijn complexer dan gewone fotonen. Voor de geordende toestand zijn de complicaties nog te overzien, maar een deugdelijke beschrijving van de faseovergang in termen van het ontstaan van een vortexcondensaat ontbreekt. Eerdere pogingen [2], uitgaande

van elementaire wereldoppervlakken uit de snaartheorie, konden het excitatiespectrum van de ongeordende toestand niet reproduceren.

Om het correcte spectrum te kunnen vinden, hebben we de volgende observatie gebruikt. Bij een temperatuur van nul Kelvin zijn er nog steeds zogenaamde ‘quantumfaseovergangen’ mogelijk die onder invloed van quantum-nulpuntsfluctuaties de orde verstoren. Hierbij correspondeert superfluïde ontoordening met de vorming van een ‘Mott-isolator’. Dat is een toestand waarin de ladingsdragers elkaar zo sterk afstoten, dat ze ‘vast komen

te zitten' en daardoor geen stroom meer geleiden. Dit in tegenstelling tot de reguliere bandisolator, waar de onderlinge interacties juist klein zijn. Deze superfluide naar Mott-isolator quantumfaseovergang manifesteert zich in iedere dimensie op dezelfde manier, wat dus ook het geval moet zijn aan de duale kant. Dus aan de kant van de wereldoppervlakken van de vortexlijnen.

Met deze wijsheid als leidraad konden we de generalisatie van de 'kluwen van vortexwereldlijnen' naar een 'schuim van vortexwereldoppervlakken' maken [3]. Dit vortexcondensaat zorgt er weer voor dat de duale fotonen massa verkrijgen, zodat langedrachtsorde verdwijnt, en het vortexcondensaat draagt in drie dimensies net zoveel bij aan het excitatiespectrum als in twee dimensies, waarmee de eerdere problemen met het spectrum [2] weggenomen zijn. De problemen bij het eerdere werk bleken voornamelijk veroorzaakt door het toekennen van te veel vrijheidsgraden aan het vortexcondensaat.

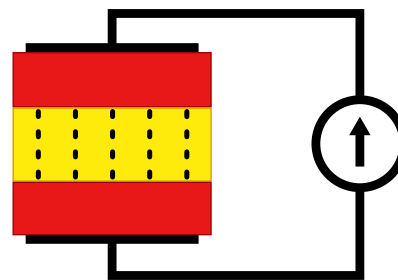
Duale vortices

Het is goed en aardig dat dit academische vraagstuk nu eindelijk opgelost is, maar kunnen we in de identificatie van de driedimensionale Mott-isolator met een 'wereldoppervlak-schuim' nog een diepere fysische betekenis ontwaren? Het vortexcondensaat is zoals gezegd dual aan een supergeleider, in het bijzonder een type-II supergeleider. In een echte type-II supergeleider worden vortices van gequantiseerde magnetische

flux gevormd onder invloed van een aangelegd magneetveld. Als we dit verschijnsel door de dualiteitsidentificatie halen, kunnen we alleen maar concluderen dat de Mott-isolator nabij de quantumfaseovergang onder invloed van een externe stroom zijn eigen gequantiseerde vortices vormen! Aangezien de Mott-isolator tot op heden als een uitermate saai toestand beschouwd werd – want de ladingsdragers zitten vast nietwaar? – komt dit als een complete verrassing. Zo we nu kunnen voorzien, is deze vinding relevant voor de 25 jaar geleden ontdekte koperoxide-supergeleiders, die een zeer hoge kritische temperatuur hebben (tot 140 K). De faseovergang van supergeleidend naar isolerend is potentieel die van ons duale vortexcondensaat en het is nu aan experimentatoren om naar de duale vortices van elektrische stroom op zoek te gaan. In mijn proefschrift doe ik meerdere voorstellen voor opstellingen die het effect zouden kunnen meten, alle gebaseerd op de opstelling in figuur 6. Op dit moment worden deze experimenten uitgevoerd in de groepen van Hans Hilgenkamp en Jan van Ruitenbeek.

Conclusies

Een wanordefaseovergang is equivalent aan de vorming van een vortexcondensaat en dit is hier uitgebreid naar drie ruimtedimensies. Hieruit volgt de voorspelling van duale vortexlijnen, in ongeordende supergeleiders optredend als lijnen van gequantiseerde stroom. Met huidige technologie zou-



Figuur 6 Schematisch voorstel voor een experiment, waarin een stuk Mott-isolator (geel) is gesandwichd tussen twee supergeleiders (rood). Een externe stroombron induceert vortexlijnen van elektrische stroom (stippellijnen).

den die waarneembaar moeten zijn in het laboratorium. De oude vraag over de aard van de isolerende fase van hoge-temperatuursupergeleiders zou definitief als faseontordering van de supergeleidende ordeparameter gekarakteriseerd worden wanneer men duale vortices aantoot. Verder zou de duale beschrijving van faseovergangen algemeen moeten gelden en mogelijk liggen in andere systemen eveneens verrassingen te wachten.

Referenties

- 1 A.J. Beekman, *Vortex duality in higher dimensions*, proefschrift Universiteit Leiden, 1 december 2011, hdl.handle.net/1887/18169.
- 2 M. Franz, *Vortex-boson duality in four space-time dimensions*, *Europhys. Lett.* **77** (2007) 47005, [arXiv:cond-mat/0607310](http://arxiv.org/abs/cond-mat/0607310).
- 3 A.J. Beekman, D. Sadri en J. Zaanen, *Condensing Nielsen–Olesen strings and the vortex–boson duality in 3+1 and higher dimensions*, *New J. Phys.* **13** (2011) 033004, [arXiv:1006.2267](http://arxiv.org/abs/1006.2267).